آموزشی

میرشهرام صدر

# ضرب داخلی و نامساوی «کُشی»!

## ضرب داخلی بردارها در $R^3$ و کاربردهای آن

**اشاره**

**در این مقاله به ارائهٔ تعریف ضرب داخلی و مفهوم آن می‌پردازیم، سپس خواص ضرب داخلی را شرح می‌دهیم. در ادامه به کاربرد ضرب داخلی در حل مسائل هندسی خواهیم پرداخت.**

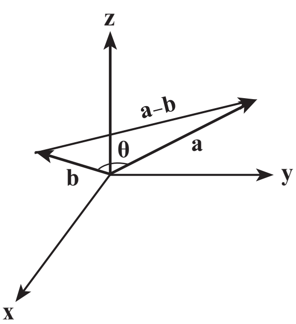
**نماد «.» را برای اولین‌بار *گوتفرید ویلهلم فون لایب نیتس*[1] (۱۷۱۶-۱۶۴۶م)، فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان آلمانی، برای ضرب داخلی بین دو بردار به‌کار برد. او حساب دیفرانسیل و انتگرال را هم‌زمان ولی کاملاً مستقل از ایزاک نیوتن[2] به‌دست آورد و از علامت‌هایی که وی در این محاسبات به‌کار برد، مانند $\frac{dy}{dx}$ هنوز هم استفاده می‌شود. در حدود ۱۷۱۲ نزاع بین‌المللی بر سر ادعاهای رقابت‌آمیز «مخترع حساب دیفرانسیل و انتگرال بودن» بین او و نیوتن درگرفت و رفتار لایب‌نیتس در این برخوردها جوانمردانه بود.**

### تعریف ضرب داخلی

فرض کنیم $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $b = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ دو بردار باشند. حاصل‌ضرب داخلی این دو بردار عددی حقیقی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

چنانچه زاویهٔ بین دو بردار a و b را θ در نظر بگیریم، در این صورت می‌توان رابطهٔ بین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار و زاویهٔ بین آن‌ها را بررسی کرد (شکل ۱).




شکل ۱

بنابر رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta \qquad (1)$$

اکنون با توجه به مختصات دو بردار a و b می‌توان نوشت:

$$a - b = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}|a-b|^2 &= (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2\\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\\ &\quad -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \qquad (2)\end{aligned}$$

و چون $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ و $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$، با جای‌گزینی این روابط و (۲) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2|a||b|\cos\theta$$

در نتیجه داریم:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a||b|\cos\theta$$

پس ضرب داخلی دو بردار را می‌توان به‌صورت زیر هم‌تعریف کرد:

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a||b|\cos\theta$$

واضح است که هرگاه $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت داریم: $a.b = 0$.

### تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار

براساس رابطهٔ $a.b = |a||b|\cos\theta$ می‌توان نوشت:

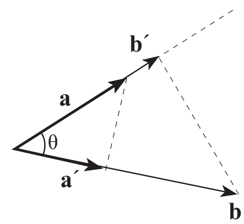
$$a.b = |b|(|a|\cos\theta)$$

با توجه به شکل ۲ ملاحظه می‌کنید که مقدار $|a|\cos\theta$ برابر با اندازهٔ تصویر قائم بردار a روی b است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a.b = |a'||b| = |b'||a| \qquad (3)$$

یعنی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a و b برابر با حاصل‌ضرب اندازهٔ یکی از بردارها در اندازهٔ تصویر قائم بردار دیگر روی همان بردار است

$$\begin{cases}|a'| = |a|\cos\theta \\ |b'| = |b|\cos\theta\end{cases}$$

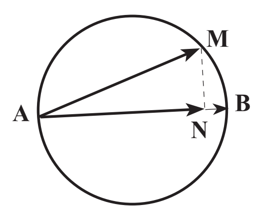



شکل ۲

**مسئلهٔ ۱.** نقاط A و B در صفحه مفروض‌اند. اگر $|\overrightarrow{AB}| = ۴$، در این صورت چند نقطه مانند M روی محیط دایره‌ای به قطر AB وجود دارد، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$.

**حل:** فرض کنیم M نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به قطر AB باشد، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$ (شکل ۳). با توجه به تعبیر هندسی ضرب داخلی داریم:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}| \quad \text{(طبق رابطهٔ ۳)}$$




شکل ۳

از طرف دیگر، چون $\overrightarrow{AN}$ در امتداد $\overrightarrow{AB}$ است، پس: $\overrightarrow{AN} = r\overrightarrow{AB}$ به‌طوری‌که $۰<r<۱$، در نتیجه:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}||r\overrightarrow{AB}| = r|\overrightarrow{AB}|^۲$$

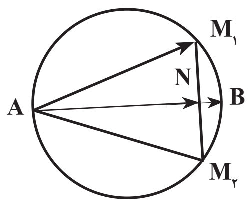
و از آنجا که: $|\overrightarrow{AB}| = ۴$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$، خواهیم داشت:

$$r|\overrightarrow{AB}|^۲ = ۱۵ \Rightarrow ۱۶r = ۱۵ \Rightarrow r = \frac{۱۵}{۱۶}$$

پس:

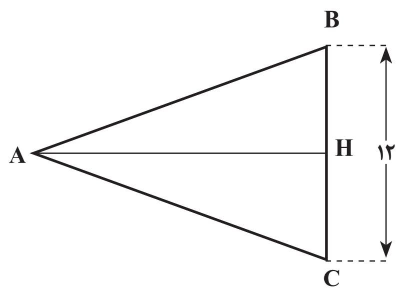
$$\overrightarrow{AN} = r\overrightarrow{AB} = \frac{۱۵}{۱۶}\overrightarrow{AB}$$

در نتیجه دو نقطه مطابق شکل ۴ روی دایره‌ای به قطر AB قرار دارند، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM_{۱,۲}} = ۱۵$.




شکل ۴

**تمرین ۱.** مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۵) را در نظر بگیرید. چند نقطه مانند M روی محیط این مثلث وجود دارد به‌طوری که: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AH} = ۶۴$.




شکل ۵

**پاسخ:** مسئله بی‌شمار جواب دارد که همگی آن‌ها نقاط روی ضلع BC هستند. (چرا؟)

## خاصیت‌های ضرب داخلی

فرض کنید a، b و c بردارهایی در $R^۳$ هستند و r عددی حقیقی باشد. در این صورت داریم:

الف) $a.a = |a|^۲ \geq ۰$

ب) $a.a = ۰ \Rightarrow a = ۰$

ج) $a.b = b.a$

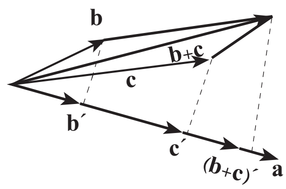
د) $a.(b+c) = a.b + a.c$

هـ) $-|a||b| \leq a.b \leq |a||b|$

و) $(ra).b = a.(rb) = r(a.b)$

**اثبات:** با توجه به تعریف ضرب داخلی، درستی خاصیت‌ها واضح است ولی در اینجا قسمت‌های «د» و «هـ» را ثابت می‌کنیم.

**اثبات د:** با توجه به شکل ۵ واضح است که تصویر مجموع دو بردار b و c روی بردار a برابر با مجموع تصویرهای b و c روی a است، یعنی:




$$(b+c)'=b'+c'$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a.(a+b) &= |a||(b+c)'| \\ &= |a|(|b'|+|c'|) \\ &= |a||b'|+|a||c'| = a.b+a.c \end{aligned}$$

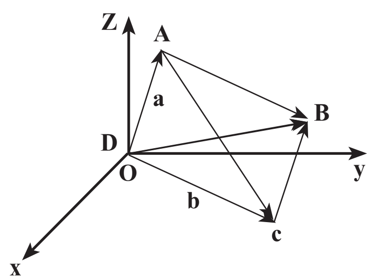
**اثبات هـ:** فرض کنیم زاویهٔ بین دو بردار a و b برابر با θ باشـد، در این صورت:

$$\begin{aligned} -۱\le \cos\theta \le ۱ &\Rightarrow -|a||b| \le |a||b|\cos\theta \le |a||b| \\ &\Rightarrow -|a||b| \le a.b \le |a||b| \end{aligned}$$

**مسـئلهٔ ۲.** با اسـتفاده از بردارها ثابت کنید: در یک متوازی‌الاضلاع، مجمـوع مربع‌های طول‌های دو قطر، برابـر با مجموع مربع‌های طول اضلاع است.

**حل:** متوازی‌الاضلاع ABCD را چنان در نظر می‌گیریم که D بر مبدأ مختصات منطبق باشد (شکل ۶).

با توجه به شکل واضح است که:




$$DB=|a+b|$$
$$CA=|a-b|$$

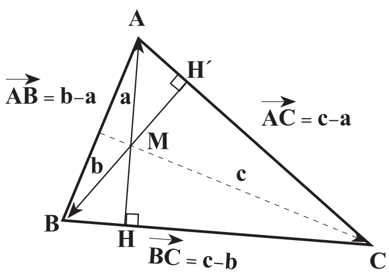
شکل۶

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} DB^۲+CA^۲ &= |a+b|^۲+|a-b|^۲ \\ &= (a+b).(a+b)+(a-b).(a-b) \\ &= |a|^۲+|b|^۲+۲a.b+|a|^۲+|b|^۲-۲a.b \\ \Rightarrow DB^۲+CA^۲ &= |a|^۲+|b|^۲+|a|^۲+|b|^۲ \\ &= DA^۲+AB^۲+BC^۲+DC^۲ \end{aligned}$$

**مسـئله ۳.** با اسـتفاده از بردارها ثابت کنید که ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

**حـل:** مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و محل برخورد دو ارتفاع AH و ´BH را M می‌نامیم (شکل ۷).




شکل ۷

اکنون از M به C وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که: $\overrightarrow{MC}=c$، $\overrightarrow{MB}=b$ و $\overrightarrow{MA}=a$. در این صورت چون AH بر BC عمود است، پس: $a.(c-b)=۰$

$$\Rightarrow a.c-a.b=۰ \Rightarrow a.c=a.b \qquad (۴)$$

از طرف دیگر، ´BH بر AC عمود است، پس:

$$b.(c-a)=۰$$
$$\Rightarrow b.c=a.b \qquad (۵)$$

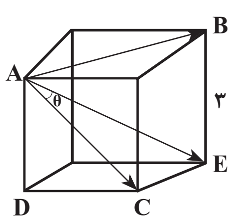
با توجه به رابطه‌های (۴) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned} b.c=a.c &\Rightarrow b.c-a.c=۰ \\ &\Rightarrow (b-a).c=۰ \end{aligned}$$

از تسـاوی اخیر نتیجه می‌گیریم که c بر $\overrightarrow{AB}$ عمود اسـت، در نتیجه MC ارتفاع وارد بر AB است و از نقطهٔ M نیز می‌گذرد.

**مسـئلهٔ ۴.** در مکعب شـکل زیر با اندازه یال ۳، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$




شکل ۸

**حل:**

$$I = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AE}})$$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta \qquad (۶)$$

چون AC قطر وجه مکعب است، پس: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۲}\times ۳$. همچنین AE قطر مکعب است، پس: $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{۳}\times ۳$. اما در $\overset{\Delta}{ACE}$ با توجه به رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|\overrightarrow{CE}|^{۲} = |AC|^{۲} + |AE|^{۲} - ۲|AC||AE|\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۹ = ۱۸ + ۲۷ - ۲(۳\sqrt{۲})(۳\sqrt{۳})\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

با توجه به رابطهٔ (۶) داریم:

$$I = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$$

$$= ۳\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۳}\times\frac{۲}{\sqrt{۶}} = ۱۸$$

## نامساوی کُشی

فرض کنیم a و b دو بردار باشند، به‌طوری که زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد. در این صورت همواره داریم:

$|a.b| \le |a||b|$ (نامساوی کُشی[3])

**اثبات:** با استفاده از استدلال بازگشتی، درستی این نامساوی را ثابت می‌کنیم:

$$|a.b| \le |a||b| \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta \le |a||b| \Leftrightarrow \cos\theta \le ۱$$

فرض کنیم: $a=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ و $b=(b_{۱},b_{۲},b_{۳})$. در این صورت با جای‌گزینی مختصات بردارهای a و b در نامساوی‌کشی، درستی نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$|a_{۱}b_{۱} + a_{۲}b_{۲} + a_{۳}b_{۳}| \le \sqrt{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}} \times \sqrt{b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲}} \qquad (۷)$$

چون نامساوی (۷) برای دو بردار دلخواه a و b برقرار است، بنابراین با جای‌گزینی $a=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ و $b=(۱,۱,۱)$ در نامساوی (۷) درستی نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$|a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}| \le \sqrt{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}} \times \sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}+۱^{۲}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}}{۳}\right)^{۲} \le \frac{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}}{۳} \qquad (۸)$$

**مسئلهٔ ۵.** اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند که در رابطهٔ $-z+۲y+z=۳\sqrt{۲}$ صدق کنند، در این صورت مینی‌مم عبارت $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ چه‌قدر است؟

**حل:** فرض کنیم: $a=(x,y,z)$ و $b=(-۱,۲,۱)$. در این صورت با توجه به رابطهٔ $-z+۲y+z=۳\sqrt{۲}$ داریم: $a.b=۳\sqrt{۲}$. اکنون مختصات بردارهای a و b را در نامساوی (۷) قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$|-x+۲y+z| \le \sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \times \sqrt{۱+۴+۱}$$

$$\Rightarrow (۳\sqrt{۲})^{۲} \le (x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\times ۶$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \ge ۳ \Rightarrow \min(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}) = ۳$$

**تمرین ۲.** اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \ge |xy+yz+xz|$.

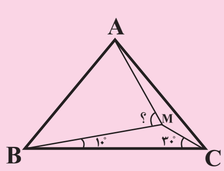
**راهنمایی:** فرض کنید: $a=(x,y,z)$ و $b=(y,z,x)$ و از نامساوی کشی استفاده کنید.

**پی‌نوشت‌ها**

1. Gottfried Wilhelm Leibniz
2. Isaac Newton
3. Augustin-Louis Cauchy


## پرسش‌های پیکارجو!

در شکل مقابل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است (AB=AC)، $\hat{A}=۸۰^\circ$ و نقطهٔ M طوری واقع است که $M\hat{B}C=۱۰^\circ$ و $M\hat{C}B=۳۰^\circ$. $A\hat{M}B$ چند درجه است؟




الف) $۵۰^\circ$ ب) $۷۰^\circ$ ج) $۷۵^\circ$ د) $۶۰^\circ$ هـ) $۸۰^\circ$